www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ECOLES NATIONALES SUPERIEURES DE L'AERONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCEES, DES TELECOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ECOLE POLYTECHNIQUE (Option T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1989 MATHEMATIQUES OPTIONS M, P'

PREMIERE EPREUVE (Durée de l'épreuve : 4 heures)

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLEME

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ sur le corps des réels ; le produit scalaire et la norme associée sont notés $(\ |\ )$ et $\|\ \|$.

Etant donné un sous-espace vectoriel G de E, on note $G^\perp$ l'orthogonal de G dans E. On dira qu'un sous-espace vectoriel F de E est somme directe orthogonale de r sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \ldots, F_r$ de E si $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_r$ et si ces sous-espaces sont orthogonaux deux à deux.

Dans tout le problème, on suppose donnés deux sous-espaces E_1 et E_2 de E dont E est somme directe orthogonale, de dimensions respectives non nulles p et n-p .

On suppose données des bases orthonormales $B_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ et $B_2 = (e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n)$ de E_1 et de E_2 , dont la réunion $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ fournit une base orthonormale de E.

On désigne respectivement par I_1, I_2 et I les applications identiques de E_1, E_2 et E et par les mêmes symboles les matrices-unités associées.

On suppose données une application linéaire f de E_1 dans E_2 et une application linéaire g de E_2 dans E_1 telles que, pour tout couple (x_1, x_2) d'éléments de E_1 et E_2

$$(1) \qquad (f(x_1) \mid x_2) = (x_1 \mid g(x_2)) \ .$$

L'objectif du problème est d'étudier l'endomorphisme φ de l'espace E qui, à tout élément x de E, écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ (où $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$) , associe

$$(2) \qquad \varphi(x) = kx_1 + f(x_1) + g(x_2) \ ,$$

où k est un nombre réel donné.

Dans la première partie, on détermine la matrice associée à φ ainsi que le noyau et l'image de cet endomorphisme φ . Dans la troisième partie, on étudie les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ dans le cas où le réel k est nul et, dans la quatrième partie, les valeurs propres et les sous-espaces propres lorsque ce réel k est non nul. La deuxième partie est consacrée à l'étude, utile pour la suite, des valeurs propres et des sous-espaces propres des applications $g \circ f$ et $f \circ g$.

PARTIE I

I - 1 Matrice associée à φ

a) Soit S la matrice associée à f dans les bases B_1 et B_2 ; déterminer en fonction de S la matrice associée à g dans ces bases B_2 et B_1 .

b) Montrer que, f étant donnée, il existe une application linéaire g et une seule satisfaisant à la relation (1).

c) Exprimer, à l'aide des matrices I_1 et S, la décomposition par blocs de la matrice T associée à φ , dans la base B.

I - 2 Etude des noyaux et des images de f et de g

a) Montrer : $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} g)^\perp \cap E_1$, $\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} f)^\perp \cap E_2$.

b) En déduire que E_1 est somme directe orthogonale de Ker f et Im g.

Prouver que l'injectivité de f équivaut à la surjectivité de g, et que dans ces conditions $p \leqslant n-p$.

c) Enoncer des résultats analogues pour les sous-espaces vectoriels Ker g et Im f .

d) En utilisant a), exprimer $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ et $(\operatorname{Ker} g)^\perp$ à l'aide de Im g et Im f .

I - 3 Etude du noyau de φ

a) On suppose $k = 0$. Exprimer le noyau $\operatorname{Ker} \varphi$ à l'aide de Ker f et de Ker g .

b) On suppose $k \neq 0$. Déterminer le noyau de φ . Pour cela, on considèrera un élément x de Ker φ, écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ et on prouvera que x_1 appartient à Ker f ∩ Im g .

I - 4 Etude de l'image de φ

a) Prouver que l'endomorphisme φ est symétrique.

b) En déduire Im φ à l'aide de Im f et de Im g .

PARTIE II

Valeurs propres et vecteurs propres de $g \circ f$ et $f \circ g$

Pour tout nombre réel λ , on note

$$U_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I_1 - g \circ f) \ ,$$

$$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I_2 - f \circ g) \ ,$$

$$F_\lambda = \operatorname{Ker}(\lambda I - \varphi) \ .$$

II - 1 Indiquer des propriétés des valeurs propres et des sous-espaces propres F_λ de φ .

II - 2 a) Montrer que $g \circ f$ est un endomorphisme symétrique de E_1 et que les valeurs propres de cet endomorphisme sont réelles et positives.

b) Etudier de même les valeurs propres de $f \circ g$.

II - 3 Prouver les deux relations $U_0 = \operatorname{Ker} f$ et $V_0 = \operatorname{Ker} g$.

TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

II - 4 a) Soit λ un nombre réel <u>non nul</u> . Montrer que λ est valeur propre de $g \circ f$ si et seulement si λ est valeur propre de $f \circ g$;

établir $f(U_\lambda) \subset V_\lambda$ et $g(V_\lambda) \subset U_\lambda$.

b) Démontrer que si le réel λ est une valeur propre non nulle de $g \circ f$, les deux inclusions précédentes sont des égalités.

Comparer les dimensions de U_λ et V_λ .

II - 5 <u>Etude d'un exemple</u>.

On suppose $p = 3$, $n = 4$ et $S = (a, b, c)$ où a, b, c sont trois réels donnés vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de $f \circ g$ et de $g \circ f$ et vérifier les résultats précédemment obtenus.

PARTIE III

Valeurs propres et vecteurs propres de φ lorsque $k = 0$

On se propose de déterminer les sous-espaces vectoriels propres F_λ de φ en fonction des sous-espaces vectoriels propres U_λ de $g \circ f$ et de V_0 ; le réel k est nul dans cette partie.

III - 1 Exprimer F_0 à l'aide de U_0 et V_0. En déduire que φ est un automorphisme de E si et seulement si f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 .

III - 2 On désigne par σ la symétrie de E, associée à la décomposition de E en somme directe $E = E_1 \oplus E_2$, définie par $\sigma(x) = x_1 - x_2$ lorsque $x = x_1 + x_2$.

a) Montrer : $\varphi \circ \sigma = -\sigma \circ \varphi$.

b) En déduire : pour tout réel λ , $\sigma(F_\lambda) = F_{-\lambda}$.

c) En déduire que les valeurs propres non nulles de φ sont deux à deux opposées et comparer les dimensions des deux sous-espaces propres de φ correspondants.

III - 3 Soit λ un nombre réel non nul. On note h_λ l'application de E_1 dans E définie par : $h_\lambda(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[x_1 + \frac{1}{\lambda} f(x_1) \right]$.

a) Prouver que $F_\lambda = h_\lambda\left(U_{\lambda^2}\right)$. (On pourra établir successivement les deux inclusions opposées.)

b) Montrer que, pour tout couple (x_1, y_1) d'éléments de U_{λ^2} ,

$(h_\lambda(x_1) \mid h_\lambda(y_1)) = (x_1 \mid y_1)$.

c) En déduire que λ est valeur propre de φ si et seulement si λ^2 est valeur propre de $g \circ f$.

III - 4 a) Etablir que E est somme directe orthogonale des sous-espaces vectoriels Ker f , Ker g , $F_{\sqrt{\mu}}$ et $F_{-\sqrt{\mu}}$ où μ parcourt l'ensemble des valeurs propres non nulles de $g \circ f$.

b) On se place dans le cas particulier où f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 . Alors $n = 2p$.

On désigne par F_+ (respectivement par F_-) la somme directe des sous-espaces propres $F_{\sqrt{\mu}}$ (respectivement des sous-espaces propres $F_{-\sqrt{\mu}}$) où μ décrit l'ensemble des valeurs propres de $g \circ f$.

A partir d'une base orthonormale B_1' de vecteurs propres de $g \circ f$, construire une base B_+' de F_+ et une base B_-' de F_- .

En déduire une base B' orthogonale de vecteurs propres de φ .

c) On se place toujours dans le cas où f est un isomorphisme de E_1 sur E_2 .

Exprimer la matrice de passage Q de B à B' en fonction de la matrice de passage P de B_1 à B_1' , de la matrice S et d'une matrice D diagonale dont l'ensemble des éléments diagonaux est égal à celui des valeurs propres de $g \circ f$.

PARTIE IV

Valeurs propres et vecteurs propres de φ lorsque $k \neq 0$

Dans cette partie le réel k est différent de 0 .

IV - 1 a) Déterminer F_0 ; à quelle condition le réel 0 n'est pas valeur propre de φ ?

b) Déterminer F_k ; à quelle condition le réel k n'est pas valeur propre de φ ?

c) Démontrer que si λ est une valeur propre de φ différente de 0 et de k, les éléments, différents de 0, de F_λ ont des composantes simultanément différentes de 0 .

IV - 2 a) Soit λ un réel différent de 0 et de k ; établir, avec les notations de la question III - 3 : $F_\lambda = h_\lambda\left(U_{\lambda(\lambda-k)}\right)$.

b) Montrer que k/2 ne peut être valeur propre et que les valeurs propres de φ vérifient des inégalités simples.

IV - 3 a) Exprimer $\varphi \circ \sigma + \sigma \circ \varphi$ à l'aide de σ et de I .

b) Soit λ une valeur propre de φ différente de 0 et de k .

Etablir que le réel $k-\lambda$ est valeur propre de φ en montrant qu'il existe un réel a_λ tel que : $(a_\lambda I + \sigma)(F_\lambda) \subset F_{k-\lambda}$

IV - 4 En déduire la liste des sous-espaces propres F_λ de φ dont la somme directe orthogonale est égale à E .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail